Εισαγωγή στην Τοπολογία, 25/9/2019, Α. Τόλιας

Σημείωση: Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δεν θα βαθμολογούνται.

Θέμα 1. (2 μον.)
Έστω X ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος των πραγματικών αριθμών και ρ μια μετρική στον X ώστε να ισχύει $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$ και $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot \rho(x, y)$ για κάθε $x, y, z \in X$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με τύπο $\|x\| = \rho(x, 0)$ είναι μια νόρμα στον X.

Θέμα 2. (2 μον.)
Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.
α) Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια από ανοικτά υποσύνολα του X να δείξετε ότι και η ένωσή τους $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ είναι επίσης ανοικτό σύνολο.
β) Αν A, B είναι δύο ανοικτά υποσύνολα του X δείξτε ότι το $A \cap B$ είναι ανοικτό.
γ) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τις αντίστοιχες των α) και β) ιδιότητες που ισχύουν για κλειστά υποσύνολα του X.

Θέμα 3. (1,5 μον.)
Έστω A ένα μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αφού αναφέρετε τον ορισμό του $\sup A$ και του $\inf A$, να δείξετε ότι $\sup A \in \overline{A}$ και $\inf A \in \overline{A}$. Να δείξετε επίσης ότι αν $\sup A \notin A$ τότε $\sup A \in A'$.

Θέμα 4. (1,5 μον.)
Έστω (X, ρ) τυχαίος μετρικός χώρος και $F \subseteq X$, ώστε το F να είναι πεπερασμένο με δύο τουλάχιστον στοιχεία. Να δειχθεί ότι το F δεν είναι συνεκτικό.

Θέμα 5. (2 μον.)
α) Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Πότε ένα υποσύνολο K του X ονομάζεται συμπαγές; (Να δώσετε τον ορισμό με χρήση καλυμμάτων εξηγώντας αναλυτικά τις σχετικές έννοιες). Με χρήση του παραπάνω ορισμού να δείξετε ότι αν K και L είναι δύο συμπαγή υποσύνολα του X τότε και το $K \cup L$ είναι συμπαγές.

β) Πότε ένας μετρικός χώρος (X, ρ) λέγεται πλήρης; Να δείξετε ότι αν (X, ρ) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος και A ένα κλειστό υποσύνολο του X τότε ο (A, ρ_A) (όπου ρ_A είναι η σχετική μετρική στο A) είναι πλήρης.

Θέμα 6. (2 μον.)
α) Δίνεται το σύνολο $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$. Να εξετάσετε αν το A είναι ανοικτό ή κλειστό και να βρείτε την κλειστή θήκη και το εσωτερικό του.
β) Να βρείτε ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ για το οποίο να ισχύει $\overline{A} = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{5\}$ και $A^o = (0, 1)$. Για το σύνολο A που ορίσατε να βρείτε να υπολογίσετε το παράγωγο σύνολο A'.

Καλή Επιτυχία!